

Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. À partir de la 7., certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

1. Pourcentages pour tous les âges.

a. Est-il exact que pour tous nombres réels positifs x et y , $x\%$ de y euros valent $y\%$ de x euros ? En déduire sans calcul compliqué ce que valent 32% de 25 euros.

b. Est-il exact que, pendant les soldes, après 4 baisses consécutives de 25% , un article devient gratuit ?

c. On passe d'un prix HT (hors taxe) à un prix TTC (toutes taxes comprises) en augmentant le prix HT de 20% . Si le prix TTC d'un article est 2 fois plus élevé dans un magasin que dans un autre, le prix HT l'est-il aussi ?

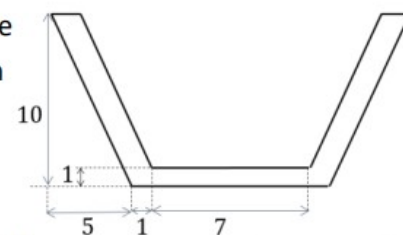
2. Double sens. Donner deux reformulations très différentes à la question « Quel nombre donne 51 quand on le multiplie par 0,01 ? » pour en lever l'ambiguïté, et apporter les deux réponses très différentes possibles.

3. Le secret pour avoir 20/20. Un sujet d'examen, noté sur 20, comprend un exercice noté sur 5 et un problème, noté sur 15. Un candidat reçoit la note de 4 sur 5 à l'exercice et de 3 sur 15 au problème. Quelle est sa note sur 20 ? Pourtant, le calcul fractionnaire démontre que $\frac{4}{5} + \frac{3}{15} = \frac{20}{20}$ (résultat à justifier). Avancez une raison à ce paradoxe et démontrez, dans le même contexte d'un exercice sur 5 et d'un problème sur 15, que le second calcul donne toujours un meilleur résultat que le premier.

4. Trouver l'intrus. On dispose d'une balance à deux plateaux comme sur la figure ci-contre. Soient 5 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 4 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 2 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde. Soient maintenant 2 024 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 2 023 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 10 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde.



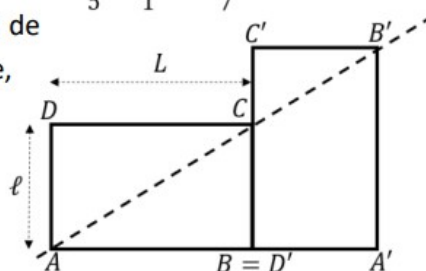
5. Tchou ! Un verre est représenté en coupe méridienne (unité en cm ; la figure n'est pas à l'échelle ; les parois intérieures et extérieures sont parallèles). On y empile un second verre, du même modèle. À quelle hauteur s'élève l'ensemble ? On accompagnera sa rédaction d'un croquis.



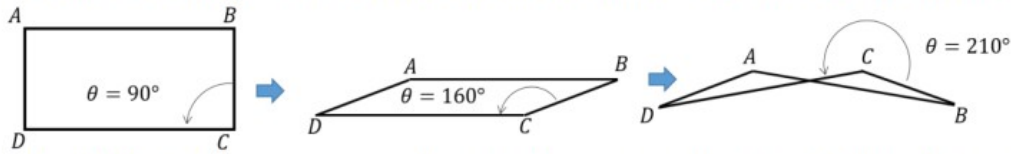
6. Le début de la richesse. Deux rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$ identiques de largeur ℓ et de longueur $L > \ell$ sont juxtaposés comme sur la figure ci-contre, où le premier est posé horizontalement et le second dressé verticalement.

Montrer que les points ACB' sont alignés quand $\frac{L}{\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

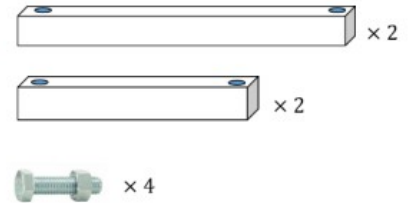
(Après l'épreuve, essayez avec deux rectangles au format CB (« carte bleue »), vous verrez, cela fonctionne !)



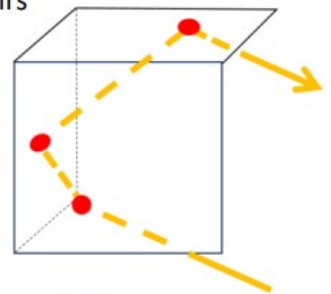
7. *Quelle forme !?* Un rectangle $ABCD$ est articulé en ses quatre sommets. Il peut donc se déformer en parallélogramme, puis en contre-parallélogramme en jouant sur l'ouverture $\theta = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ comme ci-dessous. Dessiner les configurations obtenues quand les angles mesurent successivement $\theta = 120^\circ$, puis $\theta = 180^\circ$ puis



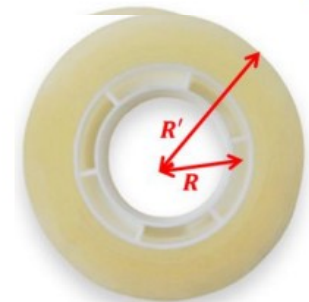
$\theta = 225^\circ$. On laissera apparents les traits de construction et on choisira DC trois fois plus grand que AD . On dispose ensuite de quatre barrettes parallélépipédiques (percées en leurs extrémités) : deux longues et deux courtes (trois fois plus petites que les longues), et de quatre boulons (un boulon est composé d'une vis et d'un écrou). Dessiner en perspective les assemblages possibles vous permettant de fabriquer un parallélogramme articulé avec ces fournitures. Cependant, quel est le seul assemblage laissant le mécanisme se déformer jusqu'au contre-parallélogramme ?



8. *Rien que pour vos yeux.* Un coin de cube est constitué de trois miroirs perpendiculaires. En général, un rayon incident qui vient frapper l'un des miroirs est ensuite réfléchi sur les deux autres avant de repartir. Par exemple, sur le dessin en regard, le rayon lumineux rebondit trois fois : il frappe d'abord la face avant, puis la face latérale gauche, puis la face supérieure. Expliquer pourquoi le rayon qui repart est alors parallèle au rayon qui arrivait. En déduire l'intérêt d'un tel dispositif pour fabriquer les catadiopres situés à l'arrière des bicyclettes et des automobiles.



9. Un rouleau de bande adhésive a pour rayon intérieur $R = 1,8$ cm et pour rayon extérieur $R' = 2,6$ cm. La bande adhésive mesure 25 m de long. Déterminer le plus précisément possible son épaisseur.



10. Un tableau de n lignes et p colonnes contient des nombres réels. On réarrange chaque ligne de gauche à droite dans l'ordre croissant, puis chaque colonne de bas en haut dans l'ordre croissant comme sur l'exemple ci-contre (où $n = 3$ et $p = 5$). Démontrer qu'à l'issue de cette seconde opération chaque ligne demeure bien classée, toujours dans l'ordre croissant de gauche à droite donc.

1	8	3	4	8
0	9	2	7	14
20	3	7	7	7
1	3	4	8	8
0	2	7	9	14
3	7	7	7	20
3	7	7	9	20
1	3	7	8	14
0	2	4	7	8